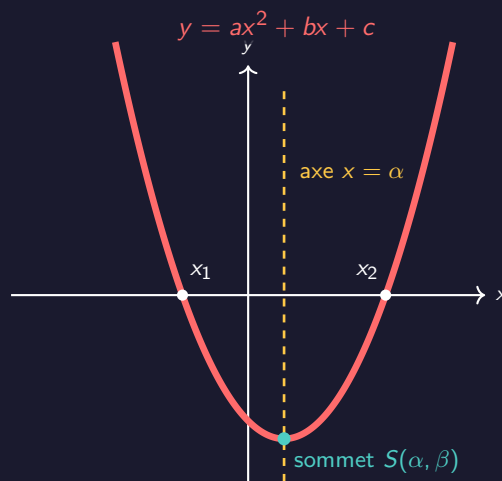


FICHE 02

Le second degré

Forme canonique ■ Discriminant & racines ■ Signe & parabole



Première ■ Spécialité Mathématiques ■ Programme officiel



Table des matières

1	Pourquoi étudier le second degré ?	3
1.1	Le problème fondamental	3
1.2	L'idée directrice	3
2	L'idée avant la formule	4
2.1	La parabole, une forme universelle	4
2.2	Compléter le carré : l'idée géniale	4
2.3	Le discriminant : un détecteur de racines	4
3	Le cours complet	5
3.1	Définition et forme développée	5
3.2	Les trois formes d'un trinôme	5
3.3	La forme canonique et la complétion du carré	6
3.4	La parabole : sommet, axe et variations	6
3.5	Le discriminant et la résolution de l'équation	7
3.6	Factorisation d'un trinôme	8
3.7	Somme et produit des racines	8
3.8	Signe d'un trinôme	9
3.9	Stratégies de factorisation	10
4	Boîte à outils : réflexes pour le bac	11
5	Exercices	13
6	Problème : <i>Une famille de paraboles</i> ★★★	16
7	✓ Corrigés détaillés	17

1 Pourquoi étudier le second degré ?

1.1 Le problème fondamental

Dès qu'une grandeur dépend du **carré** d'une autre, le second degré apparaît. Quelle hauteur atteint un ballon lancé en l'air ? Quelles dimensions donnent l'aire maximale à un enclos de périmètre fixé ? À quel prix le bénéfice d'une entreprise est-il maximal ? Toutes ces questions se ramènent à étudier une **fonction polynôme du second degré** $f(x) = ax^2 + bx + c$, dont la courbe est une **parabole**.

Trajectoires
un projectile suit
une parabole

Optimisation
aire, bénéfice,
coût minimal

Physique
antennes &
miroirs
paraboliques

Géométrie
problèmes d'aires
et de longueurs

Trajectoires. En l'absence de frottements, un objet lancé décrit une parabole : sa hauteur $h(t)$ est une fonction du second degré du temps. Le sommet de la parabole donne la **hauteur maximale**.

Optimisation. Le bénéfice d'une entreprise, l'aire d'un rectangle de périmètre donné, la portée d'un tir : autant de quantités qui, exprimées en fonction d'une variable, deviennent des trinômes. Leur **sommet** fournit l'optimum.

Physique et géométrie. La forme parabolique concentre les ondes en un **foyer** (antennes satellites, phares). Beaucoup de problèmes géométriques (aire, distance) se ramènent à une équation $ax^2 + bx + c = 0$.

1.2 L'idée directrice

L'idée directrice :

Un trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire de **trois façons**, chacune révélant une information : la forme **développée** (pour reconnaître a, b, c), la forme **canonique** (pour lire le **sommet**), la forme **factorisée** (pour lire les **racines** et le **signe**). Tout le chapitre consiste à passer de l'une à l'autre, le **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$ étant la clé qui décide du nombre de racines.

Intuition | Pourquoi c'est un chapitre clé

Le second degré est partout : en analyse (la dérivée d'un trinôme, l'étude de variations), en géométrie (parabole, intersections), en probabilités (la variance est une quantité du second degré). C'est aussi le premier endroit où l'on apprend une **méthode de résolution générale** d'une famille d'équations, avec une **démonstration complète** (celle de la formule des racines). Le maîtriser, c'est gagner des points faciles au bac et débloquer les chapitres suivants.

2 L'idée avant la formule

2.1 La parabole, une forme universelle

Intuition | Le jet d'eau et le ballon

Lance une balle, observe un jet d'eau, regarde un pont suspendu : partout la même courbe arrondie, la **parabole**. Elle monte, atteint un **point le plus haut** (ou le plus bas), puis redescend symétriquement. Cette symétrie est sa signature : il existe un **axe vertical** de part et d'autre duquel la courbe est un miroir. Le point sur cet axe est le **sommet**. Comprendre le second degré, c'est avant tout savoir où est ce sommet et dans quel sens la parabole est tournée.

2.2 Compléter le carré : l'idée géniale

Intuition | Transformer une bosse en carré parfait

Une expression comme $x^2 + 6x$ n'est pas « lisible » : on ne voit pas son minimum. L'astuce, vieille de mille ans, consiste à la **compléter** pour faire apparaître un carré :

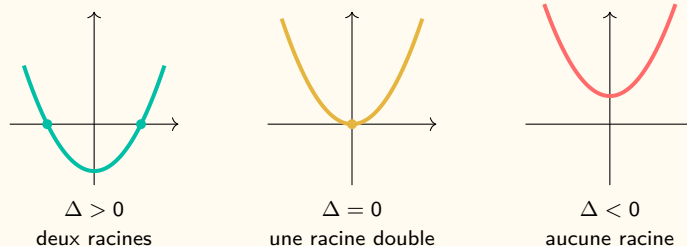
$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9.$$

On a ajouté puis retiré 9 pour reconstituer l'identité remarquable $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$. Maintenant tout est clair : $(x + 3)^2 \geq 0$, donc $x^2 + 6x$ vaut au minimum -9 , atteint en $x = -3$. C'est toute l'idée de la **forme canonique** : cacher la difficulté dans un carré, qui est toujours positif.

2.3 Le discriminant : un détecteur de racines

Intuition | Combien de fois la parabole touche-t-elle l'axe ?

Résoudre $ax^2 + bx + c = 0$, c'est chercher où la parabole **croise l'axe des abscisses**. Trois scénarios :



Le **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$ est le nombre qui, à lui seul, dit dans quel cas on se trouve, **sans tracer la courbe**. C'est un détecteur : son signe compte les solutions.

3 Le cours complet

3.1 Définition et forme développée

Définition | Fonction polynôme du second degré

Une **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme**) est une fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } \boxed{a \neq 0}.$$

Les nombres a, b, c sont les **coefficients**. La condition $a \neq 0$ est essentielle : si $a = 0$, la fonction serait affine, pas du second degré. Cette écriture est la **forme développée (réduite)**.

Attention | Le coefficient a ne doit jamais être nul

Tout le chapitre repose sur $a \neq 0$ (on divise par a , on étudie une parabole...). Avant d'appliquer la moindre formule, vérifie que le terme en x^2 est bien présent. Par exemple $(x-1)^2 - (x+2)^2$ **semble** du second degré mais se simplifie en $-6x-3$: c'est affine !

3.2 Les trois formes d'un trinôme

Définition | Développée, canonique, factorisée

Un même trinôme peut s'écrire (quand c'est possible) sous trois formes équivalentes :

- **Forme développée** : $f(x) = ax^2 + bx + c$. *Pour lire les coefficients et calculer Δ .*
- **Forme canonique** : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. *Pour lire le sommet $S(\alpha, \beta)$ et les variations.*
- **Forme factorisée** : $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ (si elle existe). *Pour lire les racines et étudier le signe.*

Méthode | Quelle forme pour quel problème ?

On me demande...

J'utilise la forme...

les coefficients, le discriminant

développée $ax^2 + bx + c$

le sommet, le minimum/maximum, les variations

canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$

les racines, le signe, résoudre $f(x) \geq 0$

factorisée $a(x-x_1)(x-x_2)$

3.3 La forme canonique et la complétion du carré

★ Théorème | Forme canonique

Tout trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) s'écrit de manière unique sous **forme canonique** :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \quad \text{avec} \quad \boxed{\alpha = -\frac{b}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}}.$$

Le point $S(\alpha; \beta)$ est le **sommet** de la parabole.

Démonstration | Obtention de la forme canonique

On factorise d'abord par a les deux premiers termes, puis on complète le carré :

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c.$$

On a utilisé $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$ (on ajoute et retire le carré de la moitié du coefficient de x). En développant le a :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

On reconnaît $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$. ■

Exemple | Mettre sous forme canonique

Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$. **Méthode directe** : $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{4} = 3$, puis $\beta = f(3) = 2 \times 9 - 36 + 5 = -13$. Donc $f(x) = 2(x - 3)^2 - 13$.

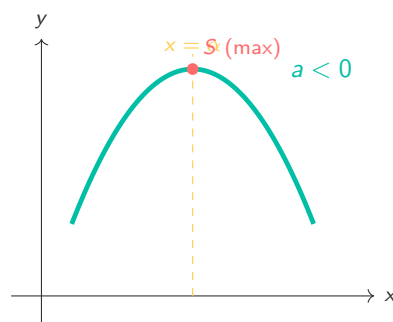
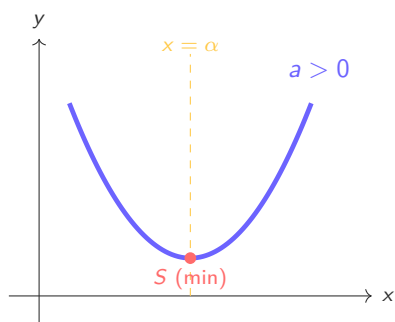
Méthode par complétion : $2x^2 - 12x + 5 = 2(x^2 - 6x) + 5 = 2[(x - 3)^2 - 9] + 5 = 2(x - 3)^2 - 18 + 5 = 2(x - 3)^2 - 13$. On retrouve bien le même résultat.

3.4 La parabole : sommet, axe et variations

✓ Propriété | Représentation graphique

La courbe de $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est une **parabole** de sommet $S(\alpha; \beta)$ et d'**axe de symétrie** la droite verticale d'équation $x = \alpha$. Son orientation dépend du signe de a :

- si $a > 0$: la parabole est **tournée vers le haut** (« sourire»), le sommet est un **minimum** ;
- si $a < 0$: la parabole est **tournée vers le bas** (« moue»), le sommet est un **maximum**.



✓ Propriété | Sens de variation

Si $a > 0$: f est strictement **décroissante** sur $] -\infty ; \alpha]$ puis strictement **croissante** sur $[\alpha ; +\infty[$ (minimum β en α).

Si $a < 0$: f est strictement **croissante** sur $] -\infty ; \alpha]$ puis strictement **décroissante** sur $[\alpha ; +\infty[$ (maximum β en α).

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(a > 0)$			

3.5 Le discriminant et la résolution de l'équation

Définition | Discriminant

On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ le nombre

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Son signe détermine le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

★ Théorème | Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

Selon le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$:

- si $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};$$

- si $\Delta = 0$: une racine double

$$x_0 = -\frac{b}{2a};$$

- si $\Delta < 0$: aucune racine réelle.

Démonstration | Résolution de l'équation du second degré (exigible)

On part de la forme canonique $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. Résoudre $f(x) = 0$ équivaut à :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Le membre de droite a le signe de Δ (car $4a^2 > 0$). Discutons :

- Si $\Delta < 0$: un carré ne peut pas être négatif, donc **aucune solution**.
- Si $\Delta = 0$: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, donc $x = -\frac{b}{2a}$ (**racine double**).
- Si $\Delta > 0$: on prend la racine carrée : $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, d'où $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (**deux racines**). ■

Exemple | Les trois cas

- (1) $\Delta > 0$: $x^2 - 5x + 6 = 0$. $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$. $x = \frac{5 \pm 1}{2}$, soit $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$.
- (2) $\Delta = 0$: $x^2 - 4x + 4 = 0$. $\Delta = 16 - 16 = 0$. Racine double $x_0 = \frac{4}{2} = 2$.
- (3) $\Delta < 0$: $x^2 + x + 1 = 0$. $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Pas de solution réelle.

3.6 Factorisation d'un trinôme

★ Théorème | Forme factorisée

- Si $\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec x_1, x_2 les deux racines.
- Si $\Delta = 0$: $f(x) = a(x - x_0)^2$ avec x_0 la racine double.
- Si $\Delta < 0$: f **ne se factorise pas** dans \mathbb{R} (pas de racine réelle).

Attention | On n'oublie pas le coefficient a !

La forme factorisée est $a(x - x_1)(x - x_2)$, **pas** $(x - x_1)(x - x_2)$. Par exemple $2x^2 - 10x + 12 = 2(x - 2)(x - 3)$: si on oublie le 2, on obtient $x^2 - 5x + 6$, qui est différent !

3.7 Somme et produit des racines

★ Théorème | Somme et produit

Si le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 (éventuellement égales, cas $\Delta = 0$), alors :

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \quad \text{et} \quad \boxed{P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}}.$$

Réciproquement, deux nombres de somme S et de produit P sont les racines de $x^2 - Sx + P = 0$.

Démonstration | Formules de somme et produit

Si $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, développons :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

En identifiant avec $ax^2 + bx + c$: le coefficient de x donne $-a(x_1 + x_2) = b$, soit $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; le terme constant donne $ax_1x_2 = c$, soit $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. ■

Méthode | À quoi servent S et P ?

1. **Trouver une racine « évidente »** : si 1 est racine, alors la seconde vaut $P/1 = P$ (car le produit est P). Idem S permet de deviner.
2. **Vérifier** des racines trouvées sans tout recalculer.
3. **Reconstituer** un trinôme à partir de deux nombres : leurs somme et produit donnent directement $x^2 - Sx + P$.

3.8 Signe d'un trinôme

★ Théorème | Signe du second degré : « signe de a sauf entre les racines »

Le signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ dépend de Δ :

- si $\Delta > 0$ (racines $x_1 < x_2$) : $f(x)$ est **du signe de a à l'extérieur** des racines, et **du signe opposé à a entre** les racines ;
- si $\Delta = 0$: $f(x)$ est **du signe de a partout**, et s'annule en x_0 ;
- si $\Delta < 0$: $f(x)$ est **du signe de a partout** (et ne s'annule jamais).

Démonstration | Pourquoi « du signe de a sauf entre les racines » ?

Sous forme factorisée ($\Delta > 0$), $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 < x_2$. Le produit $(x - x_1)(x - x_2)$ est :

- positif quand $x < x_1$ (deux facteurs négatifs) ou $x > x_2$ (deux facteurs positifs) ;
- négatif quand $x_1 < x < x_2$ (un facteur positif, un négatif).

En multipliant par a , on obtient le signe de f : même signe que a à l'extérieur, signe opposé entre les racines. Pour $\Delta \leq 0$, la forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ a un carré toujours ≥ 0 et β du signe de a , donc f garde le signe de a . ■

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
signe de f ($a > 0$)		+	0	-	0	+

Exemple | Étudier un signe

Signe de $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$. Racines : $\Delta = 16 + 48 = 64$, $x = \frac{-4 \pm 8}{-4}$, soit $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$. Ici $a = -2 < 0$: f est **négatif à l'extérieur** de $[-1; 3]$ et **positif entre** -1 et 3 . Donc $f(x) \geq 0$ si

et seulement si $x \in [-1 ; 3]$.

3.9 Stratégies de factorisation

Méthode | Quatre façons de factoriser (de la plus rapide à la plus sûre)

1. **Racine évidente** : teste $x = 0, 1, -1, 2, -2$. Si $f(x_1) = 0$, alors $(x - x_1)$ est en facteur ; la seconde racine se déduit par $P = \frac{c}{a}$.
2. **Somme-produit** : cherche deux nombres de somme $-\frac{b}{a}$ et de produit $\frac{c}{a}$ (efficace pour les racines entières).
3. **Identité remarquable** : reconnais $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ou $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
4. **Formules générales** : calcule Δ , puis les racines, puis écris $a(x - x_1)(x - x_2)$. *Marche toujours.*

4 Boîte à outils : réflexes pour le bac

Méthode | Les réflexes essentiels

1. **Avant tout** : vérifie que $a \neq 0$ (sinon ce n'est pas du second degré).
2. **Résoudre** $ax^2 + bx + c = 0$: calcule $\Delta = b^2 - 4ac$, puis applique selon son signe.
3. **Cherche une racine évidente** (0, 1, -1, 2) avant de te lancer dans le discriminant.
4. **Sommet** : $\alpha = -\frac{b}{2a}$, puis $\beta = f(\alpha)$. Ne calcule jamais β « de tête », remplace.
5. **Signe** : « signe de a sauf entre les racines ». Fais un tableau de signes.
6. **Somme-produit** : $S = -\frac{b}{a}$, $P = \frac{c}{a}$, pour deviner ou vérifier les racines.
7. **Optimisation** : un maximum/minimum se lit au **sommet** de la parabole.

Méthode | Mots-clés à repérer

Tu lis dans l'énoncé...

Tu penses à...

« résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ »	discriminant Δ
« hauteur/aire/bénéfice maximal »	sommet de la parabole ($\alpha = -\frac{b}{2a}$)
« étudier le signe de »	racines + tableau de signes
« résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$ »	signe du trinôme
« montrer que $f(x) > 0$ pour tout x »	$\Delta < 0$ et $a > 0$
« deux nombres de somme... et produit... »	racines de $x^2 - Sx + P = 0$
« pour quelles valeurs de m ... deux solutions »	signe de $\Delta(m)$
« intersection de la parabole et de la droite »	résoudre $f(x) = g(x)$

Attention | Top 6 des erreurs à éviter

1. **Oublier le signe de a** dans $-\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (surtout si $a < 0$).
2. **Écrire $\sqrt{\Delta}$ quand $\Delta < 0$** . S'il est négatif : pas de racine, on s'arrête.
3. **Oublier le coefficient a** dans la forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$.
4. **Confondre $\Delta = 0$ (une racine double) et $\Delta < 0$ (aucune racine)**.
5. **Se tromper de signe pour S** : c'est $-\frac{b}{a}$, pas $\frac{b}{a}$.
6. **Lire le signe « à l'envers »** : le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines.

Méthode | Récapitulatif des formules

Objet	Formule
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$
Racines ($\Delta > 0$)	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
Racine double ($\Delta = 0$)	$x_0 = -\frac{b}{2a}$
Forme canonique	$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \quad \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = -\frac{\Delta}{4a}$
Sommet	$S(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a})$
Somme / produit	$S = -\frac{b}{a}, \quad P = \frac{c}{a}$
Factorisation	$a(x - x_1)(x - x_2) \text{ ou } a(x - x_0)^2$
Signe	signe de a sauf entre les racines

Méthode | Algorithme : résoudre une équation du second degré

```

1  from math import sqrt
2
3  def resoudre(a, b, c):
4      delta = b**2 - 4*a*c
5      if delta > 0:
6          x1 = (-b - sqrt(delta)) / (2*a)
7          x2 = (-b + sqrt(delta)) / (2*a)
8          return (x1, x2)          # deux racines
9      elif delta == 0:
10         return (-b / (2*a),)      # une racine double
11     else:
12         return ()                # aucune racine réelle

```

5 Exercices

Exercice 1 ★★ : Identifier et calculer le discriminant

Pour chaque trinôme, donner a , b , c et calculer Δ .

a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$

c) $h(x) = -x^2 + 4x - 4$

b) $g(x) = 2x^2 + 3x - 2$

d) $k(x) = 3x^2 + x + 1$

Exercice 2 ★★ : Résoudre des équations

Résoudre dans \mathbb{R} .

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

c) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $x^2 + 2x + 5 = 0$

Exercice 3 ★★ : Forme canonique et sommet

Mettre sous forme canonique et donner les coordonnées du sommet.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 1$

2. $g(x) = -2x^2 + 8x - 3$

3. $h(x) = 3x^2 + 6x$

Exercice 4 ★★ : Factoriser

Factoriser quand c'est possible (en précisant la stratégie utilisée).

a) $x^2 - 9$

c) $2x^2 - 8x + 8$

b) $x^2 - 5x + 6$

d) $x^2 + x + 1$

Exercice 5 ★★ : Signe et inéquations

Étudier le signe, puis résoudre l'inéquation proposée.

1. $f(x) = x^2 - x - 6$; résoudre $f(x) \leq 0$.

2. $g(x) = -x^2 + 2x + 8$; résoudre $g(x) > 0$.

Exercice 6 ★★ : Somme et produit

1. Sans calculer Δ , vérifier que $x_1 = 2$ est racine de $x^2 - 9x + 14$, puis trouver l'autre racine à l'aide du produit.

2. Déterminer deux nombres dont la somme vaut 7 et le produit 12.

3. Un trinôme $x^2 + bx + c$ a pour racines -3 et 5 . Donner b et c .

Exercice 7 ★★ : Optimisation par le sommet

Une entreprise vend x objets ($0 \leq x \leq 60$). Son bénéfice (en euros) est $B(x) = -x^2 + 50x - 300$.

1. Pour combien d'objets vendus le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?
2. Pour quelles quantités l'entreprise est-elle bénéficiaire (bénéfice ≥ 0) ?

Exercice 8 ★★ : Inéquations et tableau de signes

Résoudre dans \mathbb{R} .

1. $(x^2 - 4)(x^2 - x - 2) \geq 0$.
2. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} \leq 0$ (on précisera l'ensemble de définition).

Exercice 9 ★★ : L'enclos d'aire maximale

On dispose de 40 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire. On note x la largeur (en m).

1. Exprimer la longueur en fonction de x , puis l'aire $A(x)$.
2. Pour quelle largeur x l'aire est-elle maximale ? Quelle est cette aire ?
3. Quelle forme particulière a alors l'enclos ?

Exercice 10 ★★ : Intersection d'une parabole et d'une droite

Soit \mathcal{P} la parabole $y = x^2 - 2x + 3$ et \mathcal{D} la droite $y = 2x - 1$.

1. Déterminer les points d'intersection de \mathcal{P} et \mathcal{D} .
2. Interpréter le résultat avec le discriminant (combien de points ?).

Exercice 11 ★★ : Un paramètre dans l'équation

Soit l'équation $x^2 - 4x + m = 0$, où m est un réel.

1. Calculer Δ en fonction de m .
2. Pour quelles valeurs de m l'équation a-t-elle deux solutions distinctes ? une seule ? aucune ?

Exercice 12 ★★ : Démonstrations de cours

1. Redémontrer, à partir de la forme canonique, la formule des racines dans le cas $\Delta > 0$.
2. Redémontrer les formules $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$ à partir de la forme factorisée.

Exercice 13 ★★ : Somme et produit imposés

1. Déterminer deux réels de somme $S = 1$ et de produit $P = -6$.
2. Existe-t-il deux réels de somme 2 et de produit 5 ? Justifier à l'aide d'un discriminant.
3. Un rectangle a un périmètre de 26 cm et une aire de 40 cm^2 . Déterminer ses dimensions.

Exercice 14 ★★ : Étude complète d'un trinôme

Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

1. Donner la forme canonique et le sommet.
2. Déterminer les racines et la forme factorisée.
3. Dresser le tableau de variations et le tableau de signes.
4. Tracer l'allure de la courbe (sommet, racines, ordonnée à l'origine).

Exercice 15 ★★ : Trajectoire d'un ballon

Un ballon est lancé ; sa hauteur (en mètres) en fonction de la distance horizontale x (en mètres) est $h(x) = -0,05x^2 + x + 1,8$.

1. De quelle hauteur le ballon part-il ($x = 0$) ?
2. À quelle distance la hauteur est-elle maximale ? Quelle est cette hauteur maximale ?
3. À quelle distance le ballon retombe-t-il au sol ($h(x) = 0$) ? (on donnera une valeur approchée).

6 Problème : Une famille de paraboles ★★★

Problème style prépa

Pour chaque réel m , on considère la fonction $f_m(x) = x^2 - 2mx + m + 2$ et sa parabole \mathcal{P}_m . Faire varier m engendre toute une **famille** de paraboles. Ce problème mobilise tout le chapitre : forme canonique, sommet, discriminant, signe, somme et produit, optimisation.

Partie A : forme canonique, sommet et lieu des sommets

1. Mettre $f_m(x)$ sous forme canonique. En déduire les coordonnées du sommet S_m en fonction de m .
2. On note $S_m(X; Y)$. Exprimer X et Y en fonction de m , puis montrer que, lorsque m varie, le sommet S_m décrit la parabole d'équation $Y = -X^2 + X + 2$.

Partie B : discriminant et signe

3. Calculer le discriminant $\Delta(m)$ de f_m et le factoriser.
4. En déduire, selon les valeurs de m , le nombre de points d'intersection de \mathcal{P}_m avec l'axe des abscisses.
5. Montrer que, pour $-1 < m < 2$, on a $f_m(x) > 0$ pour tout réel x .

Partie C : un point fixe

6. Écrire $f_m(x)$ sous la forme $A(x) + mB(x)$, où $A(x)$ et $B(x)$ ne dépendent pas de m .
7. En déduire qu'il existe un point par lequel **toutes** les paraboles \mathcal{P}_m passent, quel que soit m . Déterminer ses coordonnées.

Partie D : somme, produit et optimisation

8. On suppose que f_m admet deux racines x_1 et x_2 . Exprimer $x_1 + x_2$ et x_1x_2 en fonction de m .
9. Déterminer m pour que 0 soit racine de f_m . Quelle est alors l'autre racine ?
10. On note $\beta(m)$ la valeur minimale de f_m (l'ordonnée du sommet). Exprimer $\beta(m)$, puis déterminer la valeur de m qui rend ce minimum **le plus grand possible**. Quel est ce « plus grand minimum » ?

7 ✓ Corrigés détaillés

Intuition | Comment lire un corrigé

Chaque corrigé rappelle la méthode, détaille tous les calculs intermédiaires et justifie les conclusions. Cherche d'abord seul, puis compare ta rédaction à la nôtre.

Corrigé 1

Démonstration

On identifie a (coefficient de x^2), b (coefficient de x), c (terme constant), puis $\Delta = b^2 - 4ac$.

- a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$: $a = 1$, $b = -7$, $c = 10$. $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$.
 b) $g(x) = 2x^2 + 3x - 2$: $a = 2$, $b = 3$, $c = -2$. $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$.
 c) $h(x) = -x^2 + 4x - 4$: $a = -1$, $b = 4$, $c = -4$. $\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 16 - 16 = 0$.
 d) $k(x) = 3x^2 + x + 1$: $a = 3$, $b = 1$, $c = 1$. $\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times 1 = 1 - 12 = -11$.

Corrigé 2

Démonstration

On calcule Δ , puis on applique la formule des racines selon son signe.

- a) $x^2 - 7x + 10 = 0$: $\Delta = 9 > 0$ (calculé en Ex. 1). $x = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$, soit $x_1 = \frac{4}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{10}{2} = 5$. $S = \{2; 5\}$.
 b) $x^2 - 6x + 9 = 0$: $\Delta = 36 - 36 = 0$. Racine double $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$. $S = \{3\}$.
 c) $2x^2 + 3x - 2 = 0$: $\Delta = 25 > 0$. $x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$, soit $x_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-8}{4} = -2$.
 $S = \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}$.
 d) $x^2 + 2x + 5 = 0$: $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$. **Aucune solution réelle** : $S = \emptyset$.

Corrigé 3

Démonstration

On utilise $\alpha = -\frac{b}{2a}$ puis $\beta = f(\alpha)$; la forme canonique est $a(x - \alpha)^2 + \beta$ et le sommet $S(\alpha; \beta)$.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 1$: $\alpha = -\frac{-4}{2} = 2$, $\beta = f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$. Donc $f(x) = (x - 2)^2 - 3$, sommet $S(2; -3)$.
 2. $g(x) = -2x^2 + 8x - 3$: $\alpha = -\frac{8}{2 \times (-2)} = \frac{8}{-4} = -2$, $\beta = g(-2) = -8 + 16 - 3 = 5$. Donc $g(x) = -2(x - 2)^2 + 5$, sommet $S(2; 5)$.
 3. $h(x) = 3x^2 + 6x$: $\alpha = -\frac{6}{2 \times 3} = -1$, $\beta = h(-1) = 3 - 6 = -3$. Donc $h(x) = 3(x + 1)^2 - 3$, sommet $S(-1; -3)$.

Corrigé 4

Démonstration

- a) $x^2 - 9$: identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, donc $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.
- b) $x^2 - 5x + 6$: on cherche deux nombres de somme 5 et de produit 6 : ce sont 2 et 3. Donc $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.
- c) $2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x - 2)^2$ (identité $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ avec la racine double $x_0 = 2$).
- d) $x^2 + x + 1$: $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, donc **pas de factorisation dans \mathbb{R}** (aucune racine réelle).

Corrigé 5

Démonstration

1. $f(x) = x^2 - x - 6$. Racines : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$, $x = \frac{1 \pm 5}{2}$, soit $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est **négatif entre les racines**. Donc $f(x) \leq 0 \iff x \in [-2; 3]$.
2. $g(x) = -x^2 + 2x + 8$. Racines : $\Delta = 4 + 32 = 36$, $x = \frac{-2 \pm 6}{-2}$, soit $x_1 = \frac{4}{-2} = -2$ et $x_2 = \frac{-8}{-2} = 4$. Comme $a = -1 < 0$, le trinôme est **positif entre les racines**. Donc $g(x) > 0 \iff x \in]-2; 4[$.

Corrigé 6

Démonstration

1. On vérifie : $2^2 - 9 \times 2 + 14 = 4 - 18 + 14 = 0$, donc 2 est bien racine. Le produit des racines vaut $P = \frac{c}{a} = \frac{14}{1} = 14$. Si l'une vaut 2, l'autre vaut $\frac{14}{2} = 7$. (Vérification par la somme : $2 + 7 = 9 = -\frac{b}{a}$ ✓.)
2. Deux nombres de somme 7 et produit 12 sont les racines de $x^2 - 7x + 12 = 0$. $\Delta = 49 - 48 = 1$, $x = \frac{7 \pm 1}{2}$, soit 3 et 4. Les nombres sont **3 et 4**.
3. Les racines sont -3 et 5. Somme : $-3 + 5 = 2$, or $S = -b$ (ici $a = 1$), donc $b = -2$. Produit : $(-3) \times 5 = -15 = c$. Le trinôme est $x^2 - 2x - 15$.

Corrigé 7

Démonstration

1. $B(x) = -x^2 + 50x - 300$ avec $a = -1 < 0$: la parabole est tournée vers le bas, le sommet est un **maximum**. Abscisse du sommet : $\alpha = -\frac{50}{2 \times (-1)} = 25$. Bénéfice maximal : $B(25) = -625 + 1250 - 300 = 325$. L'entreprise gagne au maximum **325 €** pour 25 objets vendus.
2. On résout $B(x) \geq 0$. Racines : $\Delta = 50^2 - 4 \times (-1) \times (-300) = 2500 - 1200 = 1300$, $\sqrt{1300} \approx 36,06$. $x = \frac{-50 \pm 36,06}{-2}$, soit $x_1 \approx 6,97$ et $x_2 \approx 43,03$. Comme $a < 0$, $B(x) \geq 0$ **entre les racines** : l'entreprise est bénéficiaire pour x compris entre environ 7 et 43 objets.

Corrigé 8

Démonstration

1. On factorise chaque trinôme : $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ et $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Le produit vaut donc

$$(x - 2)(x + 2) \times (x - 2)(x + 1) = (x - 2)^2(x + 2)(x + 1).$$

Comme $(x - 2)^2 \geq 0$, le signe du produit est celui de $(x + 2)(x + 1)$ (et le produit s'annule en $x = 2$). Or $(x + 2)(x + 1) \geq 0$ à l'extérieur de $[-2; -1]$. Donc l'inéquation est vérifiée pour $x \in]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[$ (le point $x = 2$ y est déjà inclus).

2. On résout $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} \leq 0$, définie pour $x \neq 1$. Le numérateur se factorise : $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. On dresse le tableau de signes (valeurs interdites/racines : 1, 2, 3) :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$(x - 2)(x - 3)$		+	+	0 - 0	+
$x - 1$		-	0	+	+
quotient		-		+ 0 - 0	+

Le quotient est ≤ 0 sur $] -\infty; 1[$ (négatif) et sur $[2; 3]$ (négatif ou nul). Donc $S =]-\infty; 1[\cup [2; 3]$.

Corrigé 9

Démonstration

1. Le périmètre est 40, donc largeur + longueur = 20 : la longueur vaut $20 - x$. L'aire est

$$A(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x, \quad 0 < x < 20.$$

2. A est un trinôme avec $a = -1 < 0$: maximum au sommet. $\alpha = -\frac{20}{2 \times (-1)} = 10$, et $A(10) = 10 \times 10 = 100$. L'aire est maximale pour une largeur de **10 m**, et vaut 100 m^2 .

3. Alors longueur = $20 - 10 = 10 \text{ m}$ = largeur : l'enclos est un **carré**. (À périmètre fixé, le rectangle d'aire maximale est toujours le carré.)

Corrigé 10

Démonstration

1. Un point commun vérifie les deux équations, donc $x^2 - 2x + 3 = 2x - 1$. On ramène tout d'un côté :

$$x^2 - 2x + 3 - 2x + 1 = 0 \iff x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x - 2)^2 = 0.$$

Donc $x = 2$ (racine double), et $y = 2 \times 2 - 1 = 3$. Unique point d'intersection : $(2; 3)$.

2. Le discriminant de $x^2 - 4x + 4$ vaut $\Delta = 16 - 16 = 0$: une seule solution. Géométriquement, la droite est **tangente** à la parabole (elle la touche en un seul point).

Corrigé 11

Démonstration

1. Pour $x^2 - 4x + m = 0$: $a = 1$, $b = -4$, $c = m$, donc $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times m = 16 - 4m$.
2. On discute le signe de $\Delta = 16 - 4m$:
 - $\Delta > 0 \iff 16 - 4m > 0 \iff m < 4$: **deux solutions distinctes.**
 - $\Delta = 0 \iff m = 4$: **une solution** (double, $x = 2$).
 - $\Delta < 0 \iff m > 4$: **aucune solution** réelle.

Corrigé 12

Démonstration

1. On part de la forme canonique $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. Résoudre $= 0$ donne $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$. Si $\Delta > 0$, on prend la racine carrée :

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Si $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, on développe :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

En identifiant avec $ax^2 + bx + c$: $-a(x_1 + x_2) = b$ donne $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, et $ax_1x_2 = c$ donne $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Corrigé 13

Démonstration

1. Deux réels de somme 1 et produit -6 sont racines de $x^2 - x - 6 = 0$ (forme $x^2 - Sx + P$). $\Delta = 1 + 24 = 25$, $x = \frac{1 \pm 5}{2}$, soit 3 et -2 . Les nombres sont **3 et -2** .
2. Deux réels de somme 2 et produit 5 seraient racines de $x^2 - 2x + 5 = 0$. Or $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$: pas de racine réelle. Donc **de tels nombres réels n'existent pas.**
3. Soit L et ℓ les dimensions. Périmètre 26 donne $2(L + \ell) = 26$, soit $L + \ell = 13$. Aire 40 donne $L\ell = 40$. L et ℓ sont donc racines de $x^2 - 13x + 40 = 0$. $\Delta = 169 - 160 = 9$, $x = \frac{13 \pm 3}{2}$, soit 8 et 5.
5. Les dimensions sont **8 cm et 5 cm**.

Corrigé 14

Démonstration

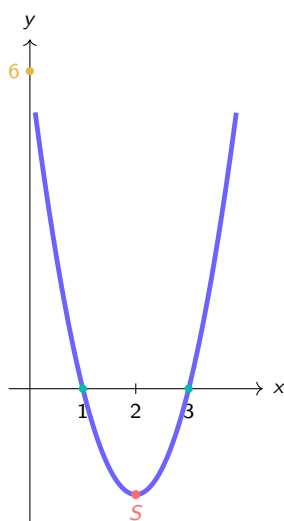
1. $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$. $\alpha = -\frac{-8}{2 \times 2} = 2$, $\beta = f(2) = 8 - 16 + 6 = -2$. Forme canonique : $f(x) = 2(x-2)^2 - 2$, sommet $S(2; -2)$.

2. Racines : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 64 - 48 = 16$, $x = \frac{8 \pm 4}{4}$, soit $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$. Forme factorisée : $f(x) = 2(x-1)(x-3)$.

3. Comme $a = 2 > 0$, f décroît puis croît ; minimum -2 en $x = 2$. Signe : positif à l'extérieur de $[1; 3]$, négatif sur $]1; 3[$.

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
signe de f	+	0	-	0	+

4. Allure : parabole tournée vers le haut, passant par les racines 1 et 3, de sommet $(2; -2)$, et coupant l'axe des ordonnées en $f(0) = 6$.



Corrigé 15

Démonstration

1. La hauteur de départ est $h(0) = -0,05 \times 0 + 0 + 1,8 = 1,8$ m.

2. $a = -0,05 < 0$: la hauteur est maximale au sommet. $\alpha = -\frac{1}{2 \times (-0,05)} = -\frac{1}{-0,1} = 10$. Hauteur maximale : $h(10) = -0,05 \times 100 + 10 + 1,8 = -5 + 11,8 = 6,8$ m. Le ballon culmine à **6,8 m**, atteints à 10 m de distance.

3. Le ballon touche le sol quand $h(x) = 0$, soit $-0,05x^2 + x + 1,8 = 0$. On multiplie par -20 pour simplifier : $x^2 - 20x - 36 = 0$. $\Delta = 400 + 144 = 544$, $\sqrt{544} \approx 23,32$. $x = \frac{20 \pm 23,32}{2}$, soit $x \approx 21,66$ ou $x \approx -1,66$ (rejeté, distance négative). Le ballon retombe à environ **21,7 m**.

Corrigé du problème : Une famille de paraboles

Démonstration / Partie A : forme canonique et lieu des sommets

1. $f_m(x) = x^2 - 2mx + m + 2$. Ici $a = 1$, $b = -2m$, donc $\alpha = -\frac{-2m}{2} = m$ et

$$\beta = f_m(m) = m^2 - 2m \cdot m + m + 2 = m^2 - 2m^2 + m + 2 = -m^2 + m + 2.$$

Forme canonique : $f_m(x) = (x - m)^2 - m^2 + m + 2$. Sommet $S_m(m; -m^2 + m + 2)$.

2. On pose $X = m$ et $Y = -m^2 + m + 2$. Comme $X = m$, on remplace m par X dans Y :

$$Y = -X^2 + X + 2.$$

Donc, quand m varie, le sommet S_m se déplace sur la parabole d'équation $Y = -X^2 + X + 2$.

Démonstration / Partie B : discriminant et signe

3. $\Delta(m) = (-2m)^2 - 4 \times 1 \times (m + 2) = 4m^2 - 4m - 8 = 4(m^2 - m - 2)$. Le trinôme $m^2 - m - 2$ a pour racines -1 et 2 (somme 1 , produit -2), donc $\Delta(m) = 4(m - 2)(m + 1)$.

4. On étudie le signe de $\Delta(m) = 4(m - 2)(m + 1)$:

- $\Delta(m) > 0$ si et seulement si $m < -1$ ou $m > 2$: **deux** points d'intersection avec l'axe des abscisses.
- $\Delta(m) = 0$ si et seulement si $m = -1$ ou $m = 2$: **un** point (la parabole est tangente à l'axe).
- $\Delta(m) < 0$ si et seulement si $-1 < m < 2$: **aucun** point.

5. Pour $-1 < m < 2$, on a $\Delta(m) < 0$ et $a = 1 > 0$: le trinôme garde le signe de a , donc $f_m(x) > 0$ pour tout réel x (la parabole est entièrement au-dessus de l'axe).

Démonstration / Partie C : un point fixe

6. On regroupe les termes selon qu'ils contiennent m ou non :

$$f_m(x) = x^2 - 2mx + m + 2 = \underbrace{(x^2 + 2)}_{A(x)} + m \underbrace{(-2x + 1)}_{B(x)}.$$

7. La valeur $f_m(x)$ ne dépend pas de m exactement quand le facteur de m est nul, c'est-à-dire $B(x) = -2x + 1 = 0$, soit $x = \frac{1}{2}$. Alors $f_m\left(\frac{1}{2}\right) = A\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$, et ce, **quel que soit** m . Donc toutes les paraboles passent par le point fixe $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$.

Démonstration / Partie D : somme, produit et optimisation

8. Lorsque f_m a deux racines, somme et produit valent : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m + 2$.

9. 0 est racine si et seulement si $f_m(0) = 0$, soit $m + 2 = 0$, donc $m = -2$. Alors $f_{-2}(x) = x^2 + 4x = x(x + 4)$: l'autre racine est -4 . (Vérification : somme $0 + (-4) = -4 = 2m = 2 \times (-2)$ ✓.)

10. Le minimum de f_m est l'ordonnée du sommet : $\beta(m) = -m^2 + m + 2$. C'est lui-même un

trinôme en m avec coefficient dominant $-1 < 0$: il admet un **maximum** pour $m = -\frac{1}{2 \times (-1)} = \frac{1}{2}$.
Ce maximum vaut $\beta\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{4}$. Ainsi, le « plus grand des minimums » est $\frac{9}{4}$, obtenu pour $m = \frac{1}{2}$: c'est précisément la hauteur du point fixe trouvé en Partie C.

Bilan de la fiche. Tu sais désormais : passer entre les formes développée, canonique et factorisée ; calculer le discriminant et résoudre toute équation du second degré ; lire le sommet et les variations ; étudier le signe d'un trinôme ; utiliser somme et produit des racines ; et résoudre des problèmes d'optimisation. Le réflexe « forme canonique pour le sommet, discriminant pour les racines, signe de a sauf entre les racines » résume tout le chapitre.